ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN

VOOR

eenigszins gevorderden of oudere leerlingen,

VERZAMELD

DOOR

J. VERSLUYS.

TWEEDE STUKJE.

AMSTERDAM. — 1887. — W. VERSLUYS.

Prijs *f* 0,60.

ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN

VOOR

EENIGSZINS GEVORDERDEN OF OUDERE LEERLINGEN,

VERZAMELD

DOOR

J. VERSLUYS.

TWEEDE STUKJE.

AMSTERDAM. — 1887. — W. VERSLUYS.

Gedrukt bij Gebroeders Hoitsema te Groningen.

VIERKANTSVERGELIJKINGEN.

---

1. Bepaal op de eenvoudigste wijze de beide wortels der vergelijking
$$(x+6)(x+7) = 8 \times 9.$$

2. $\dfrac{7}{x^2+4x} + \dfrac{21}{3x^2-8x} = \dfrac{22}{x}$. 3. $\dfrac{4x-35}{5} + \dfrac{36-5x}{5x} = 0$.

4. $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{16-2x}{2x-5} = 5\frac{1}{5}$. 5. $\dfrac{3x-7}{x} + \dfrac{4x-10}{x+5} = 3\frac{1}{2}$.

6. $a(1+2x) - a(1-2x) = b(1-4x^2)$.
7. $8x(a-x) = a(3a-2x)$.
8. $mqx^2 - mnx + pqx = np$.
9. $8x^2 + 6(a-2b)x = 9ab$.
10. $6x^2 + 9(a-8b)x = 108ab$.
11. $9x^2 - 6bx = a^2 - b^2$.
12. $25x^2 - 10bx = a^2 - b^2$.
13. $4x^2 - 4bx - a^2 + b^2 = 0$.
14. $4x^2 - 4(3a+2b)x + 24ab = 0$.
15. Geeft rechtstreeks een wortel op van elk der volgende vergelijkingen:
$$x^2 - x = m^2 - m.$$
$$\frac{x}{p} + \frac{p}{x} = \frac{a}{p} + \frac{p}{a}.$$
$$x + \frac{1}{x} = 2.$$
$$x - \frac{1}{x} = 3\tfrac{3}{4}.$$
$$\frac{x-5}{4} + \frac{4}{x-5} = 3\tfrac{1}{3}.$$
16. Zoek de waarde van A in:
$Ax^2 + 11x - 30 = 5$, als een der wortels $-3\frac{1}{2}$ is.

17. Bewijs dat de som der kwadraten van de wortels der vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ gelijk is aan $(b^2 - 2ac) : a^2$.

18. Op te lossen $cx + \frac{ac}{a + b} = (a + b)\, x^2$.

19. $\frac{x}{a} - \frac{a + b}{x} = \frac{a\,(4c - b) + 4c^2}{a\,(a + 2c)}$.

20. $(4a^2 - 9cd^2)\, x^2 + 4\,(a^2c^2 + abd^2)\, x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0$.

21. $abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$.

22. $\frac{2c^2}{d^2} + \frac{ac}{d} - (a - b)\,(2c + ad)\,\frac{x}{d} = \frac{(a+b)cx}{d} - (a^2 - b^2)\,x^2$.

23. $\frac{x - a}{2x} - \frac{x - 3}{x + a} = \frac{1}{2} - \frac{a}{6}$. 24. $\frac{x + a}{x + b} + \frac{x + b}{x - a} = \frac{a - b}{2a}$.

25. $\frac{1}{3\,(a + 2x)} - \frac{3a + 2x}{6\,(a^2 - 4x^2)} + \frac{6}{5a} + \frac{1}{2\,(2x - a)} = 0$.

26. $2\,(a + b)\left(\frac{x - b}{x - a} - \frac{x - a}{2x + 2b}\right) = \frac{2a^2 - 3b^2}{x - a} + \frac{b\,(2a + 3b)}{x + b}$.

27. $ax^2 - a\,(x - b) = bx^2 - b\,(x - a)$.

28. $(x - a)\,(x - b) - 2(x + a)\,(x - b) = 2(x + a)\,(x + b) - (x - a)\,(x + b)$.

29. $\frac{a + x}{b - x} + \frac{b + x}{a - x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

30. $\frac{a - x}{b + x} - \frac{b + x}{a - x} = \frac{a + x}{b - x} - \frac{b - x}{a + x}$.

31. Het jaartal 1874 wordt in een ander talstelsel 684 geschreven. Men vraagt naar het grondtal van dit talstelsel.

32. Bereken de waarden van x uit

$$(3 - \sqrt{5})\, x^2 + (14 - 6\sqrt{5})\, x = 5 + 5\sqrt{5}.$$

33. Vereenvoudig de breuk

$$\frac{x^2 + 2px + p^2 - q}{x^2 + 2\,(p + \sqrt{q})\, x + (p + \sqrt{q})^2}$$

34. Welke betrekking bestaat er tusschen de coëfficienten der vergelijkingen

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ en } px^2 + qx + r = 0,$$

als deze vergelijkingen één wortel gelijk hebben?

35. Bewijs dat de vergelijking $\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$, steeds twee reëele wortels heeft, welke ook de reëele waarden zijn voor a, b, p en q.

36. De boden A en B vertrekken elkaar te gemoet uit de steden C en D. Toen zij elkaar ontmoetten, had A c kilometer meer afgelegd dan B, en indien A den weg van B en B den weg van A had afgelegd, zou A in a en B in b dagen op hetzelfde punt (het ontmoetingspunt) zijn aangekomen. Men vraagt naar den afstand van beide plaatsen.

ANTWOORD: $c(\sqrt{b} + \sqrt{a}) : (\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

37. Als een der wortels van de verg. $ax^2 + bx + c = 0$ de omgekeerde is van een der wortels van de verg. $a'x^2 + b'x + c' = 0$, heeft men $(aa' - cc)^2 = (ab' - bc')(a'b - b'c)$. Bewijs dit.

38. Als x_1 en x_2 de wortels zijn van de verg. $ax^2 + bx + c = 0$, vraagt men te bewijzen, dat

$$acx^2 + (2ac - b)x + ac = ac\left(x - \frac{x_1}{x_2}\right)\left(x - \frac{x_2}{x_1}\right).$$

39. Als aan de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ voldaan wordt door drie verschillende waarden van x, zijn de coëfficienten a, b en c alle drie nul. Bewijs dit.

40. Bewijs, dat de som der kwadraten van de wortels der vergelijking $x^2 - (1 + a)x + \frac{1}{2}(1 + a + a^2) = 0$, gelijk is aan a.

41. Voor welke waarden van x is $-3 + 4x - 2x^2$ positief en voor welke negatief?

42. Geef een waarde van x op, waarvoor $\sqrt{(6x^2 + 17x + 12)}$ een meetbaar getal wordt.

43. Zeg, zonder de vergelijking $x^2 - 13x + 36 = 0$ op te lossen, of de getallen 3 en 5 tusschen de wortels dier vergelijking liggen.

44. Van welke vierkantsvergelijking zijn de wortels de omgekeerden van die der vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0\,?$$

45. Welk verband moet er bestaan tusschen de coëfficienten der vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, opdat de eene wortel der verg. gelijk zij aan $-m$ maal den anderen?
ANTWOORD: $ac(1-m)^2 + mb^2 = 0$.

46. Welk verband moet er bestaan tusschen a, b en c, opdat de wortels der verg. $ax^2 + bx + c = 0$ zich verhouden als $m : n$?

47. Los op $a^m x - \frac{a^m b^2}{a^m + c} = (a^m + c)x^2$.

48. Los op $\frac{bx + a}{ax - a} = \frac{b + x}{a^2 - x}$.

49. $\frac{bc}{a} - \frac{ax + 1}{a} + bx - \frac{1 - x}{x} = -1$.

50. Welk verband moet er bestaan tusschen de coëfficienten van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, opdat de som der kwadraten van de wortels der vergelijking p is?
(ANTW.: $b^2 - 2ac = a^2p$).

51. Van welke vierkantsvergelijking zijn de wortels beide k meer dan die van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$?

52. Bepaal een vierkantsvergelijking, waarvan de wortels de tweedemachten zijn van die der vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
ANTWOORD: $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$.

53. Welke vierkantsvergelijking heeft tot wortels de som en het produkt van de wortels der vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$?
ANTWOORD: $ax^2 + a(b - c)x - bc = 0$.

54. Welke vierkantsvergelijking heeft tot wortels de quotienten der wortels van de vergelijking $x^2 + px + q = 0$?

55. Bepaal de som der omgekeerden van de wortels der verg.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Evenzoo de som der kwadraten van die wortels.
" " " " derdemachten " " "
" " " " kwadraten van de omgekeerden der wortels.

56. Zeg, zonder de vergelijking $6x^2 + 7x - 3 = 0$ op te lossen, of 5 tusschen de wortels dier vergelijking is gelegen.

57. Los op $\frac{a^2x^2 - 2abx}{bc} - \frac{x^2 - 2bx}{ac} + \frac{b - a}{ab} -$
$$\frac{cx - ax^2}{a^2c} + \frac{x + 1}{b} - \frac{bx^2 + b^2}{a^2c} = \frac{ac - b^2}{bc}.$$

58. $\frac{b - x}{bx + ab} - \frac{a}{c} = \frac{x - a}{(ax - 1)c} + \frac{c - ax}{cx + ac}.$

59. Los de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ op, door te stellen $x = y + h$ en vervolgens h zoodanig te bepalen, dat de komende vergelijking een zuivere vierkantsvergelijking wordt.

60. Op te lossen de vergelijking
$$x^2 - x = 4\sqrt[3]{4\,(7 - 4\sqrt{3})} - 2\sqrt[3]{2\,(2 - \sqrt{3})}.$$

61. Welke is de eenvoudigste vorm voor de vierkantsvergelijking, waarvan de wortels $\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$ en $\sqrt{(7 - 4\sqrt{3})}$.
(*Limburg*, *April* 1874.)

62. Men heeft een rekenkunstige reeks; de zesde term is juist de helft van den veertienden; de tweede term is een volkomen vierkant; als men den vierden term met 2 vermeerdert en deze som door den wortel uit den tweeden term deelt, bekomt men 2 meer dan deze wortel. Bepaal de som der 100 eerste termen dier reeks? (*Zwolle* '73.)
ANTWOORD: 5250.

63. Een roeiboot kan een rivier over een afstand van 3,5 KM op- en weer afvaren in den tijd van 1 uur 40 min. Indien de snelheid van den stroom 2 KM per uur is, vraagt men de snelheid der boot in stil water te bepalen?
ANTWOORD: 5 KM. (*Van een verg. exam.* 1874.)

64. De diepte van een put te berekenen, als men weet, dat er t seconden verloopen tusschen het oogenblik, dat men een steen laat vallen in den put, en het oogenblik, dat men het vallen hoort.

65. De coëfficienten van de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ zoodanig te bepalen, dat wanneer p en q de wortels voorstellen, a, b, p en q eene rekenkundige reeks vormen.
(*Ex. Wiskunde*, *te Haarlem*, *April* 1866.)

66. 't Verschil van twee getallen is 1. Telt men bij 't verschil der kuben 't quadraat van 't eene vermenigvuldigd met het andere, en trekt men daarvan af 't quadraat van 't laatste × 't eerste, dan bekomt men 25. Welke zijn die getallen? (*Verg. Ex. te Makkum*, 1859.)

67. De beide vierkantsvergelijkingen $6x^2 + 13x + 6 = 0$ en $12x^2 + 11x + 2 = 0$ hebben één wortel gemeen.
Bepaal de wortels dezer vergelijkingen zonder de gewone oplossingsmethode toe te passen.

68. Ontbind in twee factoren van den eersten graad
$$8x^2 - 7x + 34 \text{ en } 21x^2 - 1616x + 20748.$$

69. Los de volgende vergelijking op
$$80x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{21x - 27782}{21} = 1859\frac{1}{3} - 3x^2.$$

70. Bepaal de wortels der volgende vergelijking
$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + 2\,\frac{a^2 - 6ab + b^2}{(a+b)(a-3b)} = 0.$$
ANTWOORD: $\frac{1}{2}(a - b)$ en $-4ab^2 : (a^2 - 4ab + b^2)$.

71. Iemand, die een som gelds groot a gulden heeft geleend, kwijt zich van zijn schuld door twee jaren achtereen telkens aan het einde van het jaar b gulden te betalen. Tegen hoeveel percent 's jaars heeft hij geleend?

72. Te bewijzen, dat de wortels van de vergelijking
$$\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} = 1$$
altijd reëel zijn, welke reëele waarden men ook toekenne aan a, b, p en q.

73. Bepaal a zoodanig, dat $(a + 3)x^2 + (a + 1)x - (a - 1)$ een volkomen tweedemacht wordt.

74. De voorwaarde te bepalen, dat
$$(a + bx)^2 + (a_1 + b_1x)^2$$
een volkomen tweedemacht wordt. En bewijs verder dat indien
$$(a + bx)^2 + (a_1 + b_1x)^2 \text{ en } (a + cx)^2 + (a_1 + c_1x)^2$$

volkomen tweedemachten zijn, ook

$$(b + cx)^2 + (b_1 + c_1 x)^2$$

een volkomen tweedemacht zal zijn.

75. Hoe moet men a nemen, opdat een der wortels van

$$3x^2 + (a - 1)x + 3a + 2 = 0$$

grooter zij dan 3 en de andere kleiner dan 2?

76. Hoe moet men c nemen, opdat de wortels van

$$x(x - 1)(c^2 - 3c + 1) + 2c - 3 = 0$$

het getal 1 insluiten.

77. Los de vergelijking $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ op en bewijs, dat haar wortels reëel zijn voor alle reëele waarden van a, b en c.

78. Bewijs, dat de wortels van

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3.$$

reëel zijn voor alle reëele waarden van a, b en c.

79. Bespreek de wortels van de vergelijking

$$(3m - 1)x^2 - (2m + 1)x + m = 0,$$

als m verandert van $-\infty$ tot $+\infty$.

80. Evenzoo van de vergelijking

$$(m^2 + m - 2)x^2 + (m + 1)(2x - 1) = 0.$$

81. Gegeven zijnde de vergelijkingen

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ en}$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$

stelt men $\triangle = (bb_1 - 2ac_1 - 2ca_1)^2 - (b^2 - 4ac)(b_1^2 - 4a_1c_1)$.

Bewijs, dat de voorwaarde, die noodig en voldoende is, opdat $\triangle$ negatief zij, hierin bestaat, dat de wortels der beide verg. reëel zijn en dat van elke verg. één wortel en niet meer dan één, tusschen de wortels der andere verg. zij gelegen.

82. In den tijd toen de effecten laag stonden, had iemand $2\frac{1}{2}$ % Ned. Werk. Schuld gekocht, zoodat hij, zelfs rekening houdende van de 1 % korting op de coupons, goede rente van zijn geld trok. Onlangs heeft hij die verkocht

voor 10 % hooger dan hij ze gekocht heeft, omdat hij rekent 1 % minder van zijn geld te trekken, dan toen hij de effecten kocht. Tegen welken koers netto heeft hij ze gekocht?

ANTWOORD: Tegen 45 %.

83. Uit een vat wijn tapt men eerst 75 kan en vult het daarna met water aan. Nu tapt men van dit mengsel $\frac{1}{5}$ en vult het ook verder met water aan. Hierna tapt men er 15 kan meer uit dan $\frac{1}{5}$ en brengt er weder evenveel zuiver water bij. Als nu de hoeveelheid van den nog aanwezigen wijn tot die van het water staat als 9 : 11, vraagt men het oorspronkelijke aantal kannen wijn.

(*Ex. Wisk. Haarlem* 1869.)

84. A vertrekt uit Y naar Z en legt dagelijks 8 mijlen af; nadat hij 27 mijlen heeft afgelegd, vertrekt B uit Z naar Y, en volbrengt dagelijks $\frac{1}{20}$ van den geheelen weg. Als nu B bij de ontmoeting met A evenveel dagen heeft gereisd, als hij dagelijks mijlen aflegt, vraagt men naar den afstand van Y tot Z. (*Verg. Ex. te Dirksland.*)

HOOGERE-MACHTSVERGELIJKINGEN VAN DEN TWEEDEMACHTSVORM.

1. Welke wortels worden ingevoerd als men de beide leden van $4x^2 = -25$ tot de tweedemacht brengt?

Bepaal wortels van de volgende vergelijkingen:

2. $x^4 - 12x^2 = 13$.
3. $x^6 + 14x^3 + 21 = 0$.
4. $x^8 + 22x^4 + 21 = 0$.
5. $x^{2m} + 3x^m = 4$.
6. $x^{4n} - \frac{5}{3}x^{2n} = 2\frac{1}{12}$.

---

7. Welke vergelijking heeft tot wortels $+2$, $+3$, -2 en -3?
8. Op te lossen $x^4 + 4abx^2 = (a^2 - b^2)^2$.
9. Welke waarden kan q hebben in de vergelijking

$$x^4 - 6x^2 + q = 0,$$

a, als al haar wortels reëel zijn;
b, als 2 wortels reëel zijn en twee imaginair;
c, als de 4 wortels imaginair zijn;
d, als twee wortels gelijk zijn;
e, als twee wortels nul zijn.

10. Ontbind in 4 factoren van den eersten graad
$$x^4 - 13x^2 + 36.$$

11. Bepaal een vergelijking, waaraan voldaan wordt door alle waarden, die voldoen aan een der vergelijkingen
$$x^2 - 4x - 11 = 0 \text{ en } x^2 + 4x - 11 = 0,$$
zonder deze vergelijkingen op te lossen.

12. Van welke vergelijking zijn de wortels de omgekeerden van die der vergelijking $3x^4 + 5x^2 - 8 = 0$?

13. Een vierdemachtsvergelijking van den tweedenmachtsvorm met meetbare coëfficienten op te schrijven, die tot wortel heeft $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

14. Hoe moet men a nemen opdat de vergelijking
$$(a - 2)\,x^4 - 2\,(a + 3)\,x^2 + (a - 1) = 0$$
vier reëele wortels heeft, of twee reëele wortels en twee imaginaire, of vier imaginaire?

15. Bespreek de wortels van de vergelijking
$$(p - 2)\,x^4 + 4\,(p + 3)\,x^2 + (p - 1) = 0$$
als p verandert van $-\infty$ tot $+\infty$.

16. Ga de veranderingen der wortels van de vergelijking
$$x^4 + \{2l\,(l - b) - a^2\}\,x^2 + l^2\,\{(l - b)^2 - a^2\} = 0$$
na, als a en b standvastige getallen zijn, terwijl l verandert van $-\infty$ tot $+\infty$.

17. Bepaal de waarde van m als de wortels der vergelijking
$$x^4 - (3m + 5)\,x^2 + (m + 1)^2 = 0$$
een rekenkundige reeks vormen. Bepaal ook de wortels van die vergelijking.

18. Ontbind in factoren van den eersten graad
$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

19. Schrijf een vierdemachtsvergelijking van den tweedemachtsvorm op, die ook de beide wortels van $x^2 - 12x + 35 = 0$ tot wortels heeft.

20. Bespreek de wortels van de vergelijking
$$(3m-1)z^4-(2m+1)z^2+m=0,$$
als m verandert van $-\infty$ tot $+\infty$.

21. Bewijs, dat de drieterm ax^4+2bx^2+c, waarin de letters reëele getallen voorstellen, altijd kan ontbonden worden in twee reëele factoren van den tweeden graad ten opzichte van x.

22. Op te lossen $ay^4+2(a-2b)y^2+a=0$.
ANTWOORD: $\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{(b-a)}$.

VERGELIJKINGEN, WAARIN DE ONBEKENDE ONDER EEN WORTELTEEKEN VOORKOMT.

1. $\sqrt{(5x+1)}-3+2x=38-3x$.
2. $3\sqrt{(x^4+5x^2-28{,}31)}=2x^2+11{,}8$.
3. $2x+3+2\sqrt{(2x+1)}-1=5x-4$.
4. $\dfrac{4a}{\sqrt{(a+x^2)}}=x+\sqrt{(a+x^2)}$.
5. $\sqrt{(a^2+x^2)}:\sqrt{(a^2-x^2)}=m:n$.
6. $\dfrac{0{,}2x^2-4}{\sqrt{(116-x^2)}}=\sqrt{(116-x^2)}$.
7. $\sqrt{\left(\dfrac{5}{x^2}+49\right)}-\sqrt{\left(\dfrac{5}{x^2}-49\right)}=7$.
8. $\sqrt[3]{\{5+\sqrt{(27-2x^2)}\}}=2$.
9. $x\sqrt{(x^2+231)}=2849-x^2$.
10. $\dfrac{ax^2-7a^3}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\sqrt{(x^2-b)}$.
11. $\dfrac{\sqrt{(x^2+3x+2)}+\sqrt{(3x-x^2-2)}}{\sqrt{(x^2+3x+2)}-\sqrt{(3x-x^2-2)}}=\sqrt{2}$.
12. Bewijs dat aan een vergelijking als
$$\sqrt{(1+4x)}-\sqrt{(1-4x)}=4\sqrt{x}$$
in 't algemeen wordt voldaan door 2, 1 of geen enkele waarde.
13. $\dfrac{78+13\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-x}=\dfrac{60+12\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}-\dfrac{17x^2}{(5\sqrt{x}-x)(6-\sqrt{x})}$.

14. De rechte lijn, die de toppen van twee vuurtorens hoog 40 en 55 meters vereenigt, raakt aan de oppervlakte der zee. Zij is 49 kilometers lang. Bereken door middel van deze gegevens den straal der aarde.
ANTWOORD: 6358 KM.

15. Bereken de onbekenden uit de vergelijkingen:
$$\frac{\sqrt{(x+y)}}{y}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)^3}}=\frac{17}{4\sqrt{(x+y)}}$$
$$\text{en } x=y^2+2.$$
(*Ex. Wisk. Leeuwarden* 1874.)

16. Zoek de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking
$$\sqrt{(20x+1)}+\sqrt{(3x+4)}=\sqrt{(7x-3)}.$$
(*Ex. Wisk. Zeeland* 1866).

17. Op te lossen $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$.
ANTWOORD: $\pm\frac{a}{2}\left(\frac{a^2-4}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

18. Op te lossen $\frac{1}{1-\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{1+\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$.

19. Los de volgende vergelijkingen op en bespreek de wortels
$$\sqrt{(6x-a)}+4x-3a=0$$
$$x+\sqrt{(2x-a^2)}=3a$$
$$2x-\sqrt{(x^2-a^2)}=4a$$
$$\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}=\sqrt{a}.$$

20. Los de volgende vergelijkingen op
$$\sqrt{(x^2-3ax+a^2)}+\sqrt{(x^2+3ax+a^2)}=a(\sqrt{29}+\sqrt{10})$$
$$\sqrt{\{(1+x)^2-ax\}}-\sqrt{\{(1-x)^2+ax\}}=x,$$
$$\sqrt{(1+x+x^2)}+\sqrt{(1-x+x^2)}=a,$$
$$(a+b)\sqrt{(a^2+b^2+x^2)}-(a-b)\sqrt{(a^2+b^2-x^2)}=a^2+b^2.$$

EIGENSCHAPPEN VAN DEN DRIETERM ax^2+bx+c.

1. Voor welke waarden van x heeft men
$$3x^2+4x-7>0;$$
$$2x^2-7x+1>0;$$
$$x^2+8x-3>0.$$

2. Hoe verandert de drieterm $x^2 - 6x + 15$ als men x laat veranderen van $-\infty$ tot $+\infty$?
3. Zijn er waarden voor x, die voldoen aan de ongelijkheid
$$x^2 - 6x + 5 < 0?$$
4. Zijn er waarden voor y, die voldoen aan de ongelijkheid
$$-y^2 + 6y - 9 > 0?$$
5. Welke waarden van z voldoen aan de ongelijkheid
$$z^2 - 3z + 7 > 0?$$
6. Welke waarden van x voldoen te gelijk aan de volgende betrekkingen
$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ en } x^2 + 3x - 4 > 0?$$
7. Welke waarden van x voldoen aan elk der volgende ongelijkheden:
$$x^2 - 12x + 32 > 0 \text{ en } x^2 - 13x + 22 < 0?$$
8. Evenzoo voor $x^2 - 9x + 30 < 0$ en $5x^2 - 7x + 1 < 0$.
9. Voor welke waarden van x is $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$?
10. Op te lossen de ongelijkheid $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$.
11. Door welke waarden van x wordt voldaan aan de ongelijkheid
$$(3x^4 - 2x^2 + 4)(5x^4 + 8x^2 - 1) < 0?$$
12. Tusschen welke grenzen kan x veranderen, als
$$\sqrt{(x^4 - 43x^2 + 225)}$$
reëel moet zijn?

GROOTSTE EN KLEINSTE WAARDEN.

1. Welke is van alle rechthoekige driehoeken met dezelfde hypotenusa het grootst?
2. In een gegeven driehoek den grootsten rechthoek te beschrijven.
(Antw.: Het oppervlak van den rechthoek is de helft van dat des driehoeks).
3. In een gegeven vierkant het kleinste vierkant te beschrijven. (Het gevraagde is de helft van het gegevene).
4. Bepaal onder alle rechte cilinders, met denzelfden inhoud, dien welke het kleinste oppervlak heeft.

5. Hoe moet een bak, die van boven open is, den vorm van een rechthoekig parallelepipedum heeft, en een gegeven inhoud bezit, gemaakt worden om voor zijn wanden de minste bouwstof noodig te hebben?
(Antw.: de hoogte moet gelijk zijn aan de helft van elk der 2 zijden van 't grondvlak).
6. Evenzoo voor een rechten cirkel-cilinder.
7. In een gegeven bol den grootsten cilinder te beschrijven. (Men vindt $I = 4\pi r^3 : 3\sqrt{3}$).
8. Onder alle rechte cirkel-kegels, die gelijke oppervlakken hebben, den grootsten te bepalen.
9. Onder alle rechte cirkel-kegels van gelijken inhoud, dien te bepalen, welke het kleinste oppervlak bezit.
10. Onder alle cilinders van denzelfden inhoud I dien te bepalen, waarvan de omgeschreven bol het kleinst is. (Men vindt $h = \sqrt[3]{2I} : \sqrt[3]{\pi}$).
11. Welke waarde moet men aan x geven, opdat $x^2 + (6 - x)^2$ zoo klein mogelijk worde?
12. Bepaal de grootste waarde, die

$$\sqrt{x} + \sqrt{(12 - x)}$$

kan verkrijgen, als men aan x alle mogelijke waarden mag geven.
13. Bepaal de waarde van x, die

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{2x + 2}$$

zoo groot of zoo klein mogelijk maakt.
14. Bepaal de kleinste waarde van

$$\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{a - x} \text{ en van } \frac{ab}{y} + \frac{b^2}{a - y}.$$

15. Als x verandert van $-\infty$ tot $+\infty$, tusschen welke grenzen is de breuk

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - x - 2}$$

dan positief en negatief?

16. Op te lossen de ongelijkheid

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} > 1.$$

17. In een gegeven cirkel den grootst mogelijken gelijkbeenigen driehoek te beschrijven.

18. Voor welke waarden van x zal $\frac{3x^2 - 12x + 1}{x^2 + 2}$ een maximum of minimum worden? (*Zwolle* 1880.)

19. Vind de maximum- en de minimumwaarde van

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$

als x alleen reëele waarden kan verkrijgen.
ANTWOORD: $\frac{1}{2}$ en $5\frac{1}{2}$.

20. Bepaal de maximumwaarde van

$$\frac{3x^2 - 12x + 1}{x^2 + 2}$$

als x steeds reëel moet zijn.
ANTWOORD: — 1,89. 1,05 is de minimumwaarde.

21. In een △ een rechthoek te construeeren, wiens inhoud zoo groot mogelijk is. (*Ex. Zwolle* 1879.)

22. Voor welke waarden van x wordt de breuk $\frac{3x^2 - 12x + 1}{x^2 + 2}$ een maximum of minimum? (*Id.*)

23. Op een rechte lijn zijn twee punten A en B gegeven. Langs een tweede rechte lijn, die de eerste kruist, glijdt een stuk van bepaalde lengte CD. Men vraagt de plaats van dit stuk zoodanig te bepalen, dat het oppervlak der piramide ABCD een minimum is.

24. Een viervlak ABCD zoodanig te snijden door een plat vlak, evenwijdig aan de ribben AC en BD, dat de doorsnede EFGH een minimum is.

25. Bepaal het maximum van een gelijkbeenig trapezium, waarvan de kleinste der evenwijdige zijden en de beenen een gegeven lengte a en b bezitten.

COMPLEXE GETALLEN.

1. Herleid $\sqrt[4]{-(a^2+b^2)^2}$ en $\sqrt[6]{-(3p-2q)^{12}}$.
2. Bepaal de som van
$\sqrt{-(m-n)^2}$, $\sqrt{-(m^2-2mn+n^2)}$ en $+\sqrt{-64m^2n^2}$.
3. $3\sqrt{-16}-3\sqrt{-1\frac{7}{9}}+\sqrt{-4}-2\sqrt{-36}+8\sqrt{-\frac{1}{4}}=$
4. $\sqrt{-a^2b^3}-\frac{b^2}{a}\sqrt{-a^4b}+3ab^2\sqrt{-\frac{1}{b}}+a\sqrt{-b^5}=$
5. Herleid $\sqrt[2n]{-a^{4n+1}}+\sqrt[2n]{-a}-\sqrt[2n]{-b^{3n}}$ als n een geheel getal is.
6. Herleid $\sqrt{-x^{4m+n}y^{5p}}-y\sqrt{-x^{-n}y^p}+2\sqrt{-x^{n+6}y^{p+2}}$, als n een geheel getal is.
7. Vereenvoudig $\frac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}+\frac{x-\sqrt{-x}}{x+\sqrt{-x}}$.
8. Bereken x^2-2x+2 als $x=1\pm\sqrt{-1}$.
9. $(\sqrt{-1})^{4n}+(\sqrt{-1})^{4n+1}+(\sqrt{-1})^{4n+2}+(\sqrt{-1})^{4n+3}$.
10. $(\sqrt{-1})^{2n+1}-(\sqrt{-1})^{2n+2}+(\sqrt{-1})^{2n+3}+(\sqrt{-1})^{2n+4}$.
11. $(\sqrt{-1}+\sqrt{-2})^4$.
12. $\frac{\{\sqrt{(a^2-x^2)}+x\sqrt{-1}\}^3-\{\sqrt{(a^2-x^2)}-x\sqrt{-1}\}^3}{2\sqrt{-1}}$.
13. Ontbind $9a^2+4b^2$ in twee complexe factoren van den eersten graad.
14. Herleid $\sqrt{2(8+15\sqrt{-1})}+\sqrt{2(8-15\sqrt{-1})}$.
15. Deel $-46-43\sqrt{-3}$ door $7-4\sqrt{-3}$.
16. Deel $35+10\sqrt{-3}-21\sqrt{-7}+6\sqrt{21}$ door $5-3\sqrt{-7}$.
17. Bepaal de vierkantswortels uit $a^2-b+2a\sqrt{-b}$.
18. Bepaal de som van $\sqrt{-(a-b)^2}$, $-\sqrt{-(a-2b)^2}$, $\sqrt{-4a^2b^2}$ en $-\sqrt{-4(a-b)^2}$.

19. Ontbind $x^6 - 1$ in zes factoren van den eersten graad.
20. Deel $4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2(\sqrt{-2}+\sqrt{-3})$ door $\sqrt{2}-\sqrt{-12}$.
21. Bepaal de drie derdemachtswortels uit $+1$ en -1.
22. Bepaal de drie derdemachtswortels uit

$$45\,(75 - 2a) - i\,(675 - 2a)\sqrt{2a}.$$

23. Deel $4a^4 + 5a^2b^2 + b^4$ door $2a + b\sqrt{-1}$.
24. Deel $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$ door $\sqrt{x} + \sqrt{-y}$.
25. $(36 + 13x + x^2) : \{(9 + x)(2 + \sqrt{-x})\} =$
26. Welke is de vierkantsvergelijking waarvan $-10 + \sqrt{-12}$ en $-10 - \sqrt{-12}$ de wortels zijn? Bewijs uwe redeneering. (*Verg. Ex. te Apeldoorn* 1855).
    ANTWOORD: $x^2 + 20x + 112 = 0$.
27. Verhef $\sqrt{a} - \sqrt{-b}$ tot de 5de macht.
28. Als $\dfrac{3+\sqrt{-1}}{2+5\sqrt{-1}} = \dfrac{11 - 13\sqrt{-1}}{29}$, zeg dan rechtstreeks waaraan $\dfrac{3-\sqrt{-1}}{2-5\sqrt{-1}}$ gelijk is.
29. Bereken de waarde van

$$x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 108x + 90, \text{ als } x = 2 - \sqrt{-2}.$$

30. Ontbind $x^6 - 1$ in drie reëele factoren van den tweeden graad.
31. Deel $35 + 10\sqrt{-3} - 21\sqrt{-7} + 6\sqrt{21}$ door den vorm $5 - 3\sqrt{-7}$.
    ANTWOORD: $7 + 2\sqrt{-3}$.
32. Herleid $\dfrac{a+bi}{a-bi} \pm \dfrac{a-bi}{a+bi}$.
33. Deel 70 door $\sqrt{-12} - \sqrt{-5} + \sqrt{-7}$.
34. Wat is de waarde van: $x^4 + x^3 + 7x^2 - 9x + 36$, als $x + 3 - 2\sqrt{-3} = 0$ is.
35. Herleid $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}} \pm \dfrac{a-b\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}$.
36. Deel 1 door $2 + \sqrt{-3} - \sqrt{-5}$.
37. Herleid $\dfrac{37}{\sqrt{(13\sqrt{-1} - 9\sqrt{-3})}}$.
38. Deel $\sqrt{(28\sqrt{-3} - 84)}$ door $\sqrt{(9 - \sqrt{-3})}$.

39. Herleid den vierkantswortel uit

$$4ab + 2\,(a + b)\,(a - b)\,\sqrt{-1}.$$

ANTWOORD: $\pm \{a + b + (a - b)\sqrt{-1}\}$.

40. Herleid $\dfrac{2\sqrt{5} - (3\sqrt{-5} - 10\sqrt{-1})}{2 - (3\sqrt{-1} - 2\sqrt{-5})}$.

41. Als $\sqrt{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{-3} + 2\sqrt{-6})}$ gelijk is aan $1 + \sqrt{2} + \sqrt{-3}$, waaraan is dan $\sqrt{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{-3} - 2\sqrt{-6})}$ gelijk?

42. Herleid $\sqrt[4]{(-23 + 84\sqrt{-2})}$.

43. Deel $\sqrt{(3\sqrt{-2} - 6)}$ door $\sqrt{(4 - \sqrt{-2})}$.

44. Voor welke waarden van x stelt

$$\sqrt{(x^2 - 2x - 2)} + \sqrt{(-1 + 2x - 4x^2)}$$

een reëel getal voor, voor welke waarden een complex getal en voor welke waarden een imaginair getal?

45. Schrijf een vierdemachtsvergelijking van den tweedemachtsvorm met reëele coëfficienten op, die $5 - 2\sqrt{-1}$ tot eenen wortel heeft.

46. Schrijf de wortels der volgende vergelijkingen

$$3x^4 - 7x^2 + 20 = 0$$
$$15x^4 - 8x^2 + 10 = 0$$

voorzoover zij niet reëel zijn in den vorm $a + b\sqrt{-1}$.

47. Bepaal de wortels van de vergelijking

$$(2 + \sqrt{-1})\,x^2 - (1 + 2\sqrt{-1})\,x + (3 - \sqrt{-1}) = 0.$$

48. Herleid $\sqrt{(-11 + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}$.

(*Ex. Wisk. Zuid-Holland*, 1874).

49. Herleid $\sqrt[3]{(2 + 11\sqrt{-1})}$.

50. Zoek de wortels der vergelijking

$$\tfrac{2}{15}x^2 + \tfrac{91}{225}x\sqrt{-7} + \tfrac{14}{15} = 0.$$

51. Deel $2\sqrt[4]{15} + 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{48}$ door $\sqrt[4]{-3} - \sqrt[4]{-5}$.

52. Herleid $\sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{-3} - 3\sqrt{-2}}{2\sqrt{-6}}} : \sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-3} - \sqrt{-2}}}$.

53. Bewijs dat het produkt van twee getallen, die ieder de som van vier tweedemachten zijn, ook een som van vier tweedemachten is.

54. Bepaal twee zesdemachtswortels uit

$$\left(\frac{64}{x^6} - \frac{2160y^2}{x^4} + \frac{486y^4}{x^2} - 729y^6\right) - \frac{36yi}{x}\left(\frac{16}{x^4} - \frac{120y^2}{x^2} + 81y^4\right)$$

waarin $i = \sqrt{-1}$.

55. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\sqrt[-\frac{2}{3}]{-\frac{ab^{1\frac{1}{2}}}{c^{-2}}} \times \sqrt[\frac{3}{4}]{-\frac{a^{1\frac{1}{2}}b^{-3}}{c^{-2}}} \times \sqrt[1\frac{1}{3}]{-\frac{a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{c^{1\frac{1}{3}}}}.$$

(*Ex. Wiskunde te 's Hage, April* 1864).

KUNSTGREPEN.

1. Bereken x als $2x^3 - 120 = x\sqrt{x}$.
2. $x^2 + 15x - \sqrt{(x^2 + 15x)} = 90$.
3. $(x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) = 12$.
4. $x^2 + 12x + 36 + 5\sqrt{(x^2 + 12x + 36)} = 594$.
5. $x + 7\sqrt{x} = 30$.
6. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = 3$.
7. $\sqrt[3]{x^2} - 6 = -\sqrt[3]{x}$.
8. $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[2n]{x} = c$.
9. $x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 54$.
10. $x^{\frac{2}{3}} - ax^{\frac{1}{3}} = b$.
11. Wat zijn de waarden van x in de vergelijking
$$(x^2 - 8x + 11)^2 + (x - 4)^2 = 25.$$
12. Welke zijn de waarden van x in
$$\sqrt[3]{(m - x)} - \sqrt[3]{(n - x)} = p?$$
13. Bepaal de waarde van x in de vergelijking
$$\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0.$$
ANTWOORD: 0 en 1. (*Zeeland*, *Oct.* 1873).
14. Eveneens in de vergelijking
$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0. \qquad (Id.)$$
ANTWOORD: 4, 2, 1 en −1.
15. En ook de waarde van x en y in de vergelijkingen
$$\frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 4\tfrac{1}{3} \text{ en } \frac{1 + x + y^2}{1 + y + x^2} = 3\tfrac{4}{13}. \qquad (Id.)$$
ANTWOORD: $x = \frac{3}{130}(39 \pm \sqrt{-559})$ en
$$y = -\tfrac{1}{130}(170 \pm 3\sqrt{-559}).$$
16. Welke waarden voldoen aan de vergelijking
$$1000x^{\log.^3 x - 5\log. x} = 1. \qquad (Id.)$$
ANTWOORD: 172,21 en 0,0058.

17. Op te lossen de vergelijking

$$(x^2 - 8x + 11)^2 + (x - 4)^2 = 25.$$

ANTWOORD: 1, 4 of 7. (*Ex. Wisk. Zeeland* 1866).

18. Op te lossen $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{(1-x^2)}$.

19. Los x op uit $\dfrac{\sqrt{(x^2+x+6)}}{3} = \dfrac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{(x^2+x+6)}}{\sqrt{(x^2+x+6)}}$.

20. Op te lossen $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = 20$.

ANTWOORD: ± 8 en $\pm \frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}$.

21. Op te lossen $x^2y + xy^2 = 30$ en $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}$.

22. Op te lossen het volgende stel

$$x^2 + xy + y^2 = 37$$
$$x^2 + xz + z^2 = 28$$
$$y^2 + yz + z^2 = 19.$$

(Opgelost in: Het Oplossen van Algebr. Vraagstukken).

23. Zoek alle waarden, die voldoen aan de vergelijking

$$\sqrt{(3x^2 + 2x - 17)} + 3x^2 = 173 - 2x.$$

24. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{3y} + \dfrac{1}{z} = 3\frac{4}{27}$

$\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 6\frac{1}{72}$

$\dfrac{5}{6x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{4}{z} = 12\frac{1}{36}$.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 3\frac{1}{2}(x+y) = 4\frac{2}{3}(x+z) = 2\frac{4}{5}(y+z)$.

26. $p(x^2+y^2) = q(x^2+z^2) = r(y^2+z^2) = xyz$.

27. $(x+z) = 2v$, $u + v = 2z$, $vz = m$ en $u^2 + x^2 = n$.

28. $x + y + z = a$, $xz + y = p$ en $x^3 + y^3 + z^3 = c$.

29. $(x-1)(3-x)(5-x)(7-x) = 15$.

30. $(1-x)(2+x)(4-x)(7-x) = 80$.

31. $(a-x)^4 + (x-b)^4 = c$.

32. Als men uit het stel vergelijkingen

$xy + yz + zx = 0$,

$ayz + bzx + cxy = 0$,

$bcyz + acxz + abxy + (a-b)(b-c)(c-a)\,xyz = 0$

behalve de waarden 0 en onbepaald vindt $x = \frac{1}{b+c}$, zeg dan, zonder de vergelijkingen op te lossen, wat de waarden van y en z zijn, die met deze waarde van x overeenkomen.

33. $x + y = 2v$, $vy = a$, $u + v = 2y$ en $ux = c$.

34. Op te lossen $\frac{x}{a+x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a+x)}} = \frac{b}{a}$.

35. Bepaal de waarden van x en y, die voldoen aan de vergelijkingen

$$x + y + \sqrt{(x+y)} = 2 \text{ en } x^3 + y^3 = 19.$$

36. $\frac{1}{2}xy = x + y$ en $x^2 + y^2 - xy = 27$.

37. $x^2 + y^2 = 13$ en $x^4 + y^4 = 91 + xy$.

38. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ en $x + y - \sqrt{xy} = 7$.

39. $(x+y)(x-y) = a$ en $(x-y)(x^2+y^2) = ab$.

40. $x^2 + x + y = 439$ en $xy + x^2y = 2240$.

41. Van twee getallen is het verschil vermenigvuldigd met het verschil der derde machten 196, en de som dier getallen vermenigvuldigd met de som der derde machten 1216. Welke zijn die getallen?

(*Ex. Wisk. Zwolle*, *April* 1874).

42. $x^2 + xz = 19$ en $x^2 + z^2 - x - z = 8$.

$y + z + vx = v + yz + 7 = z$ en $vz + x + y = 10$.

43. $(x-a)^5 + (b-x)^5 = c$

$(x-1)^5 + (4-x)^5 = 33$

$x^4 + (a-x)^4 = a^4$.

44. Op te lossen het stel vergelijkingen $4y^2 - xy = x$

$$\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}.$$

(Opgelost in: Het Oplossen van Algebr. Vraagstukken).

45. Zoek al de waarden van x in de vergelijking

$$x^6 - x^3 - 2 = 0.$$

(*Exam. Wiskunde Groningen*, 1866).

46. Bepaal de waarde van x in de vergelijking $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$. (*Exam. Wisk. Zeeland*, *Oct.* 1873).

47. Eveneens in de vergelijking $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$.

(*Exam. Wisk. Zeeland*, *Oct.* 1873).

48. En ook de waarden van x en y in de vergelijkingen $\frac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=4\frac{1}{3}$ en $\frac{1+x+y^2}{1+y+x^2}=3\frac{4}{13}$.
(*Exam. Wisk. Zeeland*, *Oct.* 1873).

49. Zoek 3 gedurig evenredige getallen zoodanig, dat wanneer men het getal 30 door elk dezer getallen deelt, de som der quotienten zoowel aan het product, als aan de som dezer getallen gelijk zij. (*Ex. Wisk. Arnhem*, 1868).

50. Een belegerde vesting kan volgens berekening nog 12 dagen weerstand bieden; als er 120 man uitgaan en ieder dagelijks $\frac{5}{8}$ pond brood minder ontvangt, kan de vesting het nog 16 dagen uithouden. Even lang kan de vesting weerstand bieden, als er 200 man uitgaan en ieder dagelijks $\frac{3}{8}$ pond minder ontvangt. Hoe groot is het aantal manschappen en hoeveel pond brood ontvangt ieder man dagelijks? (*Ex. Wisk. Zwolle*, 1864).
ANTWOORD: 1200 man en $3\frac{3}{4}$ pond.

51. Welke waarden van x en y voldoen aan
$$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{a} \text{ en } xy=b^2?$$

52. Op te lossen $(x+y)(xy+1)=axy$ en
$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=bx^2y^2.$$

53. Op te lossen het volgende stel vergelijkingen
$$(x+y)(1+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2)+xy=a$$
$$xy(x+y)(x+y+xy)(x+y+xy+x^2y+xy^2)=b.$$

54. Drie getallen vormen een meetk. reeks. Wanneer zij of met het kleinste of met het grootste te beginnen, als de gedeeltelijke producten eener gewone verm. onder elkander worden geplaatst, zoo geeft de optelling p en q; welke zijn de getallen?

55. Vermenigvuldigt men de som der 5 getallen a, b, c, d en e eerst met de som van a, b en c, dan met de som van b, c en d, vervolgens met de som van c, d en e en eindelijk met die van a, b en c, zoo zijn de produkten p, q, r, s en t. Vrage naar de getallen.

56. Welke is de waarde van x in $6x^3-11x^2+6x-1=0$.
(*Ex. Wisk. 's Hage*).

57. Los het volgende stel vergelijkingen op met behulp der ontbinding in factoren

$$axyz = a + m + m(x + xy)$$
$$bxyz = b + m + m(y + yz)$$
$$cxyz = c + m + m(z + zx).$$

58. Los het volgende stel vergelijkingen op

$$ab - \tfrac{1}{2}(a + b)(x + y) + xy = 0$$
$$cd - \tfrac{1}{2}(c + d)(x + y) + xy = 0$$

en leid uit deze vergelijkingen af, dat

$$\frac{(x-y)^2}{4} = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

59. Op te lossen $xy = ab$, $a^n x^m + b^m y^n = 2\sqrt{a^m b^n x^m y^n}$.

60. Los op $x(y + z) = 2a$, $y(z + x) = 2b$, $z(x + y) = 2c$.

61. Eveneens $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = p$ en $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = q$.

62. Bepaal x en y uit $x + y + 3\sqrt[3]{axy} = a$ en $\sqrt{(x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2})} + \sqrt{(y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4})} = b$.

63. Bereken x en y als $(x + y)(xy + 1) = 18xy$
$(x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = 208x^2y^2$.

64. Los op $x + y + z = 13$, $x^2 + y^2 + z^2 = 61$, $2yz = x(y + z)$.

65. Bereken de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek, als de schuine zijde c en de hoogtelijn h op de schuine zijde gegeven zijn. Bespreek de uitkomst.

66. De zijden van een rechthoekigen driehoek te berekenen, als men zijn omtrek $2s$ en zijn oppervlakte m^2 kent. Bespreek de uitkomst.

67. De afmetingen te berekenen van een cilinder, die beschreven is in een bol, waarvan de straal R is, als de geheele oppervlakte van den cilinder gelijk is aan die van een cirkel welks straal a is.
Ga na wanneer twee cilinders aan het vereischte voldoen en wanneer er slechts 1 is.

68. Een evenredigheid te bepalen, als de som der middelste termen $2s$ is, de som der uiterste termen $2t$ en de som der tweedemachten van de 4 termen $4q^2$.

69. Een evenredigheid te bepalen, als men de som $4s$ der termen kent, de som $4t^2$ van de tweedemachten der termen en de som $4d^3$ van de derdemachten der termen.

(*Ex. Wisk. Zeeland*).

70. De termen eener evenredigheid te vinden, als men kent het verschil der middelste termen, het verschil der uiterste, en de som der vier termen.

71. De termen eener evenredigheid te vinden, als men kent het produkt der middelste termen, het verschil tusschen de som der uiterste en de som der middelste termen en de som der kwadraten van de vier termen.

72. De termen eener evenredigheid te bepalen, als gegeven zijn de som der uiterste termen a, de som der middelste termen b en de som der kuben van de 4 termen k.

73. Op te lossen het stel $x^{\frac{m}{2}} + x^{\frac{m}{4}} y^{\frac{m}{4}} + y^{\frac{m}{2}} = a$

$$x^m + x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}} + y^m = b^2.$$

74. Bepaal de waarde van x, y en z uit

$$(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z)$$
$$x^2 = y + z$$
$$z^2 = x^2 + y^2.$$

75. Op te lossen het volgende stel vergelijkingen

$$3x + 3y - z = 3$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 7 - 4\tfrac{1}{2}z$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 4\tfrac{1}{4}z + 11.$$

76. Los het volgende stel vergelijkingen op met behulp der ontbinding in factoren:

$$x + y^2 + yz^2 = a(xyz - 1)$$
$$y + z^2 + zx^2 = b(xyz - 1)$$
$$z + x^2 + xy^2 = c(xyz - 1).$$

Men beginne met de vierkanten der onbekenden te elimineeren. J. N. Noël.

77. De termen eener evenredigheid te bepalen, als gegeven zijn het verschil tusschen de som der uiterste en die der middelste termen, het verschil tusschen de som der kwadraten van de uiterste en die van de middelste termen,

en het verschil tusschen de som der kuben van de uiterste en die van de middelste termen.

78. Op te lossen het volgende stel vergelijkingen

$$x^2 + xy + y^2 = c^2$$
$$z^2 + zx + x^2 = b^2$$
$$y^2 + yz + z^2 = a^2.$$

(Men zoeke eerst $xy + yz + zx$ te bepalen).

ONBEPAALDE VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD.

---

1. Welke geheele positieve waarden van x en y voldoen aan de vergelijking

$$-2\tfrac{1}{6}+0{,}78x+4{,}5y+10=\frac{5\tfrac{4}{15}x+0{,}25y}{3}+111?$$

2. Welke geheele negatieve waarden van x en y voldoen aan de vergelijking

$$3-\frac{4x+7y}{9}=15+\frac{2y+x}{3}?$$

3. Bepaal de geheele waarden der onbekenden, die voldoen aan het volgende stel vergelijkingen

$$x+y+z=16$$
$$x+y-u=9$$
$$y-z+u=1.$$

4. Welke zijn de geheele positieve waarden van x, y en z, die voldoen aan de vergelijking $3x+5y+7z=41$.
(*Exam. Wisk. Zeeland*, *Oct.* 1873).

5. Welke zijn de geheele positieve waarden van x, y en z in de volgende vergelijkingen:

$$2x+5y-7z=22 \text{ en } 3x+4y-8z=0?$$

(*Ex. Wisk. Zeeland*).

6. Bij 't getal 37 voegt men telkens 13. Zoodra de som meer dan 1000 is, trekt men er 1000 af, en telt bij de rest gedurig weer 13. Hoeveel malen zal men 13 moeten bijtellen om 77 te krijgen? (*Ex. Wisk. 's Hage* 1874).

7. Welk getal van 3 cijfers is gelijk aan 35 maal de som zijner cijfers?

8. Van drie personen tusschen de 60 en 80 jaren oud, is de gezamenlijke leeftijd 200 jaren. Als het verschil in ouder-

dom tusschen den oudsten en den jongsten $\frac{1}{15}$ van de som van beider jaren is, vraagt men naar ieders ouderdom.

(*Ex. Wisk.*, *Zwolle* 1867).

9. Welke twee op elkander volgende termen der rekenkundige reeks 3, 7, 11, 15, enz. zijn respectievelijk deelbaar door 5 en 7, en na hoeveel termen zal men weder twee termen vinden, die evenzoo voldoen?

(*Ex. Wisk.*, *Zuid-Holland*, *Oct.* 1874).

10. Dertig personen, mannen, vrouwen en kinderen, hebben samen *f* 69,60 verteerd. Iedere man heeft *f* 4,20 verteerd, iedere vrouw *f* 1,65 en ieder kind 30 cent. Hoeveel mannen waren er, hoeveel vrouwen en hoeveel kinderen?

11. Vier personen moeten *f* 14100 deelen. A moet hebben ○□△× gulden, uitgedrukt in het 10-tallig stelsel, B het door dezelfde getalmerken uitgedrukte getal in het 9-tallig, C in het 8-tallig en D in het 7-tallig stelsel; hoeveel ontvangt ieder?

(*Vergel. Examen*, *Enschedé* 1867).

ONBEPAALDE VERGELIJKINGEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

Welke geheele positieve waarden voor x en y voldoen aan de volgende vergelijkingen?

1ᵉ. $x^2 + 3xy - 2x + 2y = 8$. 2ᵉ. $x^2 - 3xy - 4x + 10y = 12$.

3ᵉ. $2x^2 + 3xy - 4x - 2y = 20$. 4ᵉ. $x^2 - 2xy + y = 4$.

5ᵉ. $3x^2 - 4xy + x + y = 7$. 6ᵉ. $3x^2 - 2xy + 9y - 6x = 21$.

7ᵉ. Twee geheele positieve getallen te vinden, waarvan het produkt 3 grooter is dan de som.

8ᵉ. Twee geheele positieve getallen te vinden, waarvan de som 21 grooter is dan het quotient.

9ᵉ. Twee geheele positieve getallen te vinden, waarvan het produkt 4 maal zoo groot is als de som.

10ᵉ. Door welke geheele positieve waarden van x en y kan aan de vergelijking

$$xy - 10 + 2y = 2x^2 + 3x$$

voldaan worden?

11ᵉ. Vind de geheele positieve waarden van x en y in

$$xy + 3x - 5y = 106.$$

(*Verg. Ex. Nieuwerkerk a/d IJsel, Sept.* '75).

ANTWOORDEN. 1ᵉ. $x = 2$ en $y = 1$.

2ᵉ. $x = 2$ en $y = 4$, of 3 en 15, of 14 en 4, of 46 en 15.

3ᵉ. $x = 1$ en $y = 22$, of 2 en 5, of 3 en 2.

4ᵉ. $x = 3$ en $y = 1$ of $x = 8$ en $y = 4$.

5ᵉ. $x = 2$ en $y = 1$, of 4 en 3, of 9 en 7.

6ᵉ. $x = 3$ en $y = 4$, of 5 en 24, of 6 en 17, of 13 en 24, of 30 en 49.

7ᵉ. 2 en 5, of 3 en 3.

8ᵉ. 38 en 2; 27 en 3, 20 en 5; 18 en 6; 11 en 11.

9ᵉ. 20 en 5; 12 en 6; 8 en 8.

12ᵉ. Vind eenige waarden voor x en y, opdat voldaan worde aan de vergelijking $7x^2 - 3x + 5xy - 2y - 37 = 0$.
(*Exam. Wisk. Zwolle* 1874).

13ᵉ. Hoe bepaalt men de getallen, waarvan de som der vierkanten weer een vierkant is. (*Ex. Wisk. Zeeland* 1874).

Welke meetbare waarden voldoen aan de volgende vergelijkingen?

14ᵉ. $y^2 = 5x^2 + 7x$.

15ᵉ. $9x^2 + 7x + 5 = z^2$.

16ᵉ. $y^2 = x^2 + 5x + 12$.

17ᵉ. $y^2 = 5x^2 + 7x + 1$.

18ᵉ. $z^2 = 2x^2 + 6x + 4$.

19ᵉ. $y^2 = 10x^2 + 29x + 21$.

20ᵉ. $y^2 = 21z^2 + 2z - 20$.

21ᵉ. $y^2 = 2x^2 + 2$.

22ᵉ. $y^2 = 6 + 13x + 6x^2$.

23ᵉ. $z^2 = 3x^2 + 46$.

24ᵉ. $2y^2 - y = 5x^2 + 3x + 7$.

25ᵉ. $3y^2 + y = 7x^2 + 4x + 5$.

26ᵉ. $3x^2 + 6x = y^2 + 2y$.

27ᵉ. $4x^2 + 3x + 6y = 10xy$.

28ᵉ. $y^2 = x^2 + 1$.

29ᵉ. $y^2 = x^2 - 1$.

30ᵉ. $7x^2 - 3x + 5xy - 2y - 37 = 0$.

31ᵉ. Bepaal de afmetingen van een rechthoekig trapezium, zóó dat de zijden en een der diagonalen door geheele getallen worden voorgesteld.

32ᵉ. Welke zijn de drie op elkander volgende getallen, die de eigenschap hebben, dat hun som door 6 en die der kwadraten door 11 deelbaar is? (*Zwolle* 1873).

33ᵉ. Zoek twee getallen, waarvan de som, zoowel als de som hunner tweedemachten en de som hunner derdemachten vierkantsgetallen zijn. (*Verg. Ex. te Aduard*, 1866).

34ᵉ. Hoeveel geheele positieve waarden zijn er, die voldoen aan de vergelijking $x + y + xy = 61$.
(*Ex. Wisk. Noord-Holland*, 1865).

35ᵉ. Twee geheele getallen te vinden, waarvan het produkt 100 meer is dan 2 maal het verschil.

36ᵉ. Zoek in geheele getallen de zijden van een rechthoek, waarvan de oppervlakte door hetzelfde getal wordt voorgesteld als de omtrek.

VERSCHIKKINGEN EN VERBINDINGEN.

1. Men vraagt de som te berekenen van alle getallen van 4 cijfers, die men met 4 verschillende getalmerken, wier som 18 is, kan samenstellen. (*Woude* 1875).
2. Hoeveel verschillende waarden verkrijgt de uitdrukking $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} +$ enz. tot k termen, als elke wortel zoowel negatief als positief kan zijn?
   ANTWOORD: 2^k.
3. Hoeveel platte vlakken kunnen ieder door 3 van n punten gaan?
4. Hoeveel viervlakken kunnen er zijn, wier hoekpunten 4 van n gegeven punten zijn?
5. Hoeveel verschillende sommen kan iemand betalen als hij in zijn zak heeft: een rijksdaalder, een gulden, een halven gulden, een kwartje en een dubbeltje?
   ANTWOORD: $2^5 - 1$.
6. Op hoeveel verschillende manieren kunnen 5 voorwerpen verdeeld worden in 2 pakjes?
   ANTWOORD: 31.
7. Op hoeveel verschillende manieren kan men de volgende letters links en rechts van een streep plaatsen
   $$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d.$$
   ANTWOORD: $5 \times 4 \times 3 \times 2$.
8. Op hoeveel verschillende manieren kan men zeven personen in een kring plaatsen?
   ANTWOORD: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$.
9. Wanneer men alle mogelijke combinatiën vormt van 10 elementen, vraagt men hoevelen een oneven aantal elementen bevatten. (*Ex. Wisk. Zeeland* 1874).

10. Welk is het grootst aantal punten, waarin U lijnen elkander kunnen snijden? Bewijs de formule.
(*Ex. Hoofdond. Zeeland* 1872).
11. Als P evenwijdige lijnen door Q andere evenwijdige lijnen worden gesneden, hoeveel afgesneden deelen heeft men dan? (*Id.*)
ANTWOORD: $2PQ - (P + Q)$.
12. Hoeveel combinatiën 3 aan 3 kunnen er uit 5 elementen gevormd worden? (*Id.*)
13. Wat is het grootste aantal gewichten, dat men kan krijgen door 5 verschillende gewichten samen te voegen?
ANTWOORD: $2^5 - 1$.
14. Op hoeveel manieren kan men een produkt van $2n$ factoren ontbinden in produkten van 2 factoren ieder?
15. Op hoeveel manieren kan men een produkt van $3n$ factoren ontbinden in produkten van 3 factoren ieder?
16. Op hoeveel manieren kan men een produkt van mn factoren ontbinden in produkten van m factoren ieder?
17. Een getal te vinden, dat 20 deelers heeft, het getal zelf en de eenheid meegerekend.
18. Op hoeveel manieren kan men 40 kaarten verdeelen in een hoopje van 7 en een hoopje van 33?
19. Met drie verschillende cijfers kan men zes verschillende getallen vormen. Deelt men 5 daarvan door de som der cijfers, dan zijn de quotienten 26, 27, 36, 47 en 48 en de resten nul. Wat zal het quotient zijn, als men het zesde getal door de som der cijfers deelt?
(*Gorinchem* 1883).

BINOMIAALFORMULE.

1. Herleid $(a + b)^m - (a - b)^m$.
2. Bepaal den vijfden term van $(a + p)^{16}$.
3. „ „ vierden „ „ $(a - b)^{100}$.
4. „ „ negenden „ „ $(x - z)^{16}$.

5. Bepaal de twee middelste termen van $(2ab - 3cd)^{19}$.
6. Uit hoeveel termen bestaat de m^{de} macht van het polynomium $a + b + c + d + \ldots$ tot n termen.
   (*Ex. Wisk. Zeeland* 1874).
7. Wat is de algemeene term van de ontwikkeling van
   $$(a + b + c + d + \ldots)^p$$
   als n het aantal termen van den veelterm is.
8. Wat is de coëfficient van den term, die a^2bcd bevat in de ontwikkeling van $(a + b + c + d)^5$.
9. Wat is de coëfficient van den term, die $a^3b^4c^2d^5e^6$ bevat in de ontwikkeling van $(a + b + c + d + e)^{20}$.
10. Wat zijn de $2n$-de en de middelste term der ontwikkeling van $(\frac{1}{2}a^2 - 2b^{-2})^{2n}$?

KANSREKENING.

1. In een vaas zijn 24 kogeltjes waarvan 6 wit, 8 rood en 10 zwart. Men trekt er eerst 7 uit en daarna uit de overblijvende 3. Hoe groot is de kans dat de eerste 7 allen zwart en de laatste 3 alle wit zullen zijn?
2. Hoe groot is de kans om, wanneer men met 3 dobbelsteenen werpt, met twee daarvan, en niet meer, evenveel oogen te werpen?
3. Hoe groot is de kans om, wanneer men met 4 dobbelsteenen werpt, met 2 daarvan evenveel oogen te werpen en met de andere twee aantallen, die daarvan en onderling verschillen?
4. Wanneer men met drie dobbelsteenen werpt, wat is dan voordeeliger om te raden onder de 9 of boven de 12, en hoe staan de kansen van winst tot elkander tusschen dengenen, die laat werpen en hem die werpt?

METHODE DER ONBEPAALDE COËFFICIENTEN.

1. Ontbind in 3 factoren van den tweeden graad $x^6 - 1$. Evenzoo $x^6 + 1$.

2. Ontbind in 2 factoren van den 2-den graad
$$x^4 - 6x^2 - 3x + 2.$$
3. Evenzoo $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
4. Ontbind in 2 factoren van den derden graad
$$x^6 - 25x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4.$$
5. De som van twee breuken met onderling ondeelbare noemers is $\frac{2(11x + 9)}{3x^2 + 2x - 5}$. Zoek deze breuken.
6. Splits de volgende 6 breuken in andere, wier noemers van lageren graad zijn:

a. $\frac{5x + 4}{6 + x - 2x^2}$. b. $\frac{x + 4}{2x + x^2 - x^3}$.

c. $\frac{6x^3 - 13x^2 + 10x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$. d. $\frac{2x}{1 - x^2}$.

e. $\frac{x^2}{(1 - x)^3}$. f. $\frac{8x^4 - 8x^3 + 1}{x - 4x^2 + 4x^3}$.

7. Het verschil van 2 breuken met onderling ondeelbare noemers is $\frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$. Welke breuken zijn dat?
8. De som van 2 breuken met onderling ondeelbare noemers is $\frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 5}$. Welke zijn die breuken?
9. De som van 2 breuken met onderling ondeelbare noemers is $\frac{7x - 10}{x^2 - 2 - 3x}$. Welke breuken zijn dit?
10. Welk verband moet er tusschen m, p en q bestaan, opdat
$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m + 1)x + (m + 1)^2$$
de tweedemacht zij van een veelterm, die geheel is ten opzichte van x?
11. Ontbind de breuk $\frac{3x^2 + 14x - 7}{x(x - 1)(x + 1)}$ in drie andere, die achtereenvolgens x, $x - 1$ en $x + 1$ tot noemer hebben.

(*Zwolle* 1873).

12. Ontbind in de eenvoudigste breuken het gebroken:

$$\frac{2\,(5x^2 - 8)}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

(*Ex. Wisk. Groningen*, *April* 1867).

Splits in eenvoudiger breuken:

13. $\dfrac{x}{x^2 - 1}$.

14. $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

15. $\dfrac{1 - x^2 + 2x}{(3-x)^2}$.

16. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.

17. $\dfrac{x+1}{x^3\,(x^2+1)^2}$.

18. $\dfrac{7x+8}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)}$.

19. $\dfrac{x^2}{(x-a)^2\,(x^3+a^3)}$.

20. $\dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3\,(x+1)^2\,(x-2)}$.

21. $\dfrac{7x + 5x^3}{(2x^2+3)^3}$.

22. $\dfrac{x^2+3}{(x^2+1)^3\,(x-1)\,x^2}$.

---

23. Het verschil van twee breuken met onderling ondeelbare noemers is $\dfrac{x+2}{x^2 - 3x + 2}$. Welke breuken zijn dit?

(*Utrecht April* '75).

24. De som van twee breuken met onderling ondeelbare noemers is $\dfrac{7x - 10}{x^2 + 2 - 3x}$. Welke breuken zijn dit? (*Id.*)

25. $\dfrac{13x + 10\sqrt{-2}}{15x^2 - 31x\sqrt{-2} - 20}$ is het verschil van twee breuken met onderling ondeelbare noemers. Zoek deze breuken.

(*Zuid-Holland Oct.* '74).

26. Splits in vier breuken den vorm

$$\frac{6 + 8x - 9x^2}{x\,(x-1)^3}.$$

(*Overijsel Oct.* '74).

27. De som van twee breuken met onderling ondeelbare noemers is $\frac{31a-1}{6a^2-5a-6}$. Welke zijn die breuken?

(*Den Haag Oct.* '79).

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN.

1. Onderzoek of de twee vergelijkingen
$$a + c = 2b \text{ en } \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{2}{c}$$
ten gevolge hebben $a : b = c : d$.
2. Onderzoek of de twee vergelijkingen
$$x + y + u + v = 2$$
$$xy - uv = 2 - 2(u + v)$$
ten gevolge hebben de betrekking
$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$
3. Bepaal de coëfficienten a en b door de voorwaarde dat $ax + bx^2 + cx^3$ de som der kwadraten van de eerste x geheele getallen voorstelt.
4. Als $a : b = c : d$ kan de vorm
$$(ab + cd)^2 - (ab - cd)^2 + 2a^2c^2 + 2b^2d^2$$
herleid worden tot $c^2(a^2 + b^2) : a^2$. Bewijs dit.
5. Kan $(ab + cd)^2 + (ac + bd)^2 - 4abcd$ ontbonden worden in reëele factoren?
6. Bewijs, dat de verhouding $(la + mc + ne) : (lb + md + nf)$ gelijk is aan elk der verhoudingen $a : b$, $c : d$ en $e : f$, als deze 3 onderling gelijk zijn, en dat ze tusschen de grootste en de kleinste van deze drie gelegen is, als ze alle drie ongelijk zijn. De letters stellen rekenkundige getallen voor.
7. Twee boden gaan van P en Q elkaar tegemoet. De eerste vertrekt 2 uur vroeger dan de andere. Twee uur 5 min. na 't vertrek van den tweeden ontmoeten zij elkaar en komen dan tegelijk in P en Q aan. In hoeveel tijd heeft dan ieder den weg afgelegd?

(*Van een Verg. Exam.* 1874).

8. Als $a : c = c : d$, dan kan $(ac - d^2)^2 - (a^2 - cd)^2$ herleid worden tot $(a + c + d)^2 (a - c)^2 (a - d) : a$. Bewijs dit.
9. Bewijs dat $a^2 + b^2 + c^2 - 1$ gelijk is aan $2abc$, als $c = ab + \sqrt{(1 - a^2)} \sqrt{(1 - b^2)}$.
10. In Engeland gebruikt men voor het schatten van den inhoud van vaten de formule van OUGHTRED
$$V = \tfrac{1}{3}\pi H (2R^2 + r^2)$$
en in Frankrijk de formule van DEZ
$$V = \pi H [R - \tfrac{3}{8}(R - r)]^2.$$
Welke van deze twee formules geeft den grootsten inhoud?
11. Los het volgende stel vergelijkingen op
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= a_1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 &= a_2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + nx_2 &= a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} &= a_n. \end{aligned}$$
12. Op te lossen de ongelijkheid:
$$\frac{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x} - 2)}{x^2 + 4x + 3} > 0.$$
13. Als $\dfrac{bx - ay}{cy - az} = \dfrac{cx - az}{by - ax} = \dfrac{z + y}{x + z}$ zal elk van deze breuken gelijk zijn aan $\dfrac{x}{y}$. Leid hieruit verder af, dat òf $x = y$, òf $z = x + y$.
14. Elimineer a, b en c uit de vergelijkingen
$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$
$$\frac{x^m}{a^{m+n}} + \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}},$$
$$a^n + b^n + c^n = d^n.$$
15. Ontleend $x^4 + 4$ in twee reëele factoren.
16. Op te lossen de vergelijking
$$\frac{\sqrt[n]{(a + x)}}{a} + \frac{\sqrt[n]{(a + x)}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

17. Welke waarden van x voldoen te gelijk aan de volgende twee ongelijkheden
$$x^3 - 12x^2 + 32x > 0 \text{ en } x^3 - 11x^2 + 10x < 0.$$
ANTWOORD: tusschen 1 en 4 en tusschen 8 en 10.

18. Bewijs, dat $2(a - x)\{x + \sqrt{(x^2 + b^2)}\} < a^2 + b^2$.

19. Druk $x^3 + x^{-3}$ uit in (functie van) $x + x^{-1}$.

20. Als $x^2 + 2my^2$ een vierkant is, is $x^2 + my^2$ de som van twee vierkanten. Bewijs dit.

21. De vergelijkingen
$$2(ab + pq) = (a + b)(p + q),\ 2(ac + rs) = (a + c)(r + s),$$
$$2(cd + pq) = (c + d)(p + q),\ 2(bd + rs) = (b + d)(r + s),$$
hebben ten gevolge
$$2(rs + pq) = (r + s)(p + q).$$
Bewijs dit.

22. Bepaal de coëfficienten a, b en c door de voorwaarde, dat $ax^3 + bx^2 + cx$ de som voorstelt van de kwadraten der eerste x geheele getallen.

23. Bewijs de volgende twee ongelijkheden
$$a + \tfrac{1}{2}d - \sqrt{a(a + d)} < d^2 : 8a$$
$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{(a - \alpha)} < \alpha : 3\sqrt[3]{(a - \alpha)^2}.$$

24. Als men in den veelterm
$$ax^2 + 2bxy + cx^2,$$
stelt $\quad x = \alpha X + \alpha' Y,\ y = \beta X + \beta' Y,$
neemt deze veelterm den vorm $AX^2 + 2BXY + CY^2$ aan.
Bereken nu $\dfrac{B^2 - 4AC}{b^2 - 4ac}$.

25. Herleid den vierkantswortel uit
$$3 - \sqrt{3 + \sqrt{[2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{\{3 + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}})\}}}]}}.$$

26. Splits in vier breuken den vorm
$$\frac{6 + 8x - 9x^2}{x(x - 1)^3}.$$
(*Exam. Wisk. Zwolle* 1874).

27. Trek den vierkantswortel uit $108 - \sqrt{1200} + \sqrt{2000} - \sqrt{60}$.
ANTWOORD: $\pm(10 - \sqrt{3} + \sqrt{5})$. F. v. SCHOOTEN, 1632.
Zie N. Arch. III, 208.

28. Herleid $\sqrt[3]{(215 + 81\sqrt{6})}$.

29. Bewijs dat $(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - x$ tot nul nadert, als x tot ∞ nadert.

30. Door welke geheele positieve waarden van x en y kan voldaan worden aan de vergelijking

$$xy - 10 + 2y = 2x^2 + 3x.$$

(*Ex. Wisk. Zwolle, April* 1874).

31. Van welke rekenkundige reeks is de som der eerste n termen altijd gelijk aan $an^2 + bn$?

32. Als p en q twee geheele positieve getallen aanwijzen, vraagt men voor $x = 1$ de waarde te vinden van

$$\frac{px^{p+q} - (p+q)\,x^q + q}{(x-1)^2}.$$

33. Voor welke positieve geheele waarden van x en y wordt $5x^2 + 23xy + 8y^2$ een volkomen vierkant?

(*Ex. Wisk. Noord-Holland*, 1880).

34. Bepaal de waarde, waartoe $\dfrac{x - 2 + \sqrt[3]{(1 - x + x^2)}}{x^3 - x}$ nadert, als x tot 1 nadert.

35. Herleid $\dfrac{14 + 20x + 16x^2}{1 + 2x - 5x^2 - 6x^3}$ tot eenvoudiger breuken, zoodanig dat de som der breuken gelijk zij aan den opgegeven vorm, dat de tellers uit geheele getallen en de noemers uit bestaanbare eerste-machtsfactoren bestaan.

(*Ex. Wisk. Zeeland, Oct.* 1862).

36. Bewijs dat uit de betrekkingen

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad a'a'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$
$$a'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \qquad aa'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$
$$a''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad aa' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

voortvloeien de volgende

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \qquad a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = 0,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad a\beta + a'\beta' + a''\beta'' = 0,$$
$$a^2a'^2a''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = a^2\beta^2\gamma^2 + a'^2\beta'^2\gamma'^2 + a''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

37. Herleid

$$\sqrt[3]{(10462\tfrac{1}{2} - 3702\tfrac{1}{8}\sqrt{7})} \text{ en } \sqrt[3]{(2\tfrac{7}{64} + 1\tfrac{7}{32}\sqrt{3})}.$$

38. De volgende vormen door het invoeren van nieuwe veranderlijken homogeen te maken

$$\frac{a}{x} + y + xy^2 + x^2y^3 + x^4y^5$$

$$\frac{ay}{x^2} + bxy^4 + c\sqrt{\frac{y^5}{x}}.$$

$$\frac{ay^2}{x^2} + by^8x + \frac{cy^5}{\sqrt{x}}.$$

$$\frac{ay}{xz} + bxyz + \frac{cz}{xy}.$$

$$ay\sqrt{x} + by\sqrt{z^3} + c\sqrt{xz^3}.$$

39. Hoeveel is de som der kuben van de getallen 11 tot en met 100? (*Verg. Ex. te Ommen*, 1886).

ANTWOORD: 25499475.

40. Als een geheele veelterm in x, waarvan de coëfficienten geheele getallen zijn, zoowel voor $x = 0$ als voor $x = 1$ twee oneven getallen oplevert, zal geen enkele geheele waarde van x den veelterm nul kunnen maken. Bewijs dit.

41. Onderzoek de juistheid der volgende indentiteiten

$$a+b+c+d = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{a^3b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)} + \frac{a^3c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)} + \frac{a^3d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

enz.

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

Opmerking. Ik ontleen deze vormen aan het leerboek der algebra van Rouché, waar ze echter ten onrechte vóor de invoering der negatieve getallen voorkomen, aangezien zoowel in den eersten als in den tweeden vorm naast $a - c$ ook $c - a$ voorkomt, en van deze twee getallen moet 1 negatief zijn.

42. Als men in den veelterm

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

stelt

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z = \gamma Y + \gamma' Y + \gamma'' Z,$$

neemt die veelterm den vorm

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY$$

aan. Bereken nu de uitdrukking

$$\frac{AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2}{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2}$$

43. Herleid $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})}$ tot den vorm $(a + b\sqrt{c})\sqrt[3]{d}$.

PRIJSVRAGEN.

Te *Clifton-College* is het de gewoonte, dat de directeur der inrichting eens in elken cursus een prijsvraag uitschrijft. Soms hebben die vragen betrekking op werktuigkunde of toepassingen der electriciteit, soms op wiskundige zaken, die meer vindingrijkheid dan kennis vereischen. Een der vragen in vorige jaren opgegeven was b.v. deze: als al de zijden en diagonalen

van een regelmatigen tienhoek onbepaald verlengd worden ontstaan er 10000 driehoeken.

De laatste prijsvraag luidt aldus:

Als men een landkaart kleurt, waarin de districten of andere onderdeelen door kleuren worden aangewezen, wordt natuurlijk vereischt, dat geen twee aangrenzende districten dezelfde kleur krijgen en door het te beproeven vindt men dat 4 kleuren altijd voldoende zijn, wat ook de vorm of het aantal der districten moge wezen. Waarom vier? zou hetzelfde waar zijn, als de districten een bol moesten bedekken?

Een oplossing mag niet meer dan 30 regels of 1 bladzijde schrift bevatten en 1 bladzijde met figuren.

VRAAGSTUKKEN OPGEGEVEN BIJ DE EXAMENS VOOR DE AKTE K[1].

1864.

1. Verklaar, hoe de log. van een getal tusschen 1 en 10, bij benadering gevonden kan worden door toepassing der vooraf te bewijzen stelling $\frac{1}{2}$ log. ab = log. $\sqrt{a}$ + log. $\sqrt{b}$.
2. Herleid $\sqrt{(a + b\sqrt{-1})}$ tot den vorm $A + B\sqrt{-1}$ en pas die herleiding toe om $\sqrt[4]{-1}$ tot dien vorm te brengen.
3. Zoek eene formule voor de som der termen eener rekenk. reeks van hoogere orde en pas die formule toe, om de som te vinden van de kuben van de rij der natuurlijke getallen van 1 tot n.

1866.

1. Eene der benaderingsmethoden ter bepaling van de onmeetbare wortels eener hoogere machtsvergelijking te verklaren en toe te passen op de bepaling tot in 5 decimalen nauwkeurig, van den positieven wortel der vergelijking
$$2x^4 + 3x^2 - 5x - 12 = 0.$$
2. Ontbind in de meest eenvoudige rationale gebrokens
$$\frac{20x^3 + 13x^2 - 6x + 7}{4x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2}.$$
3. Voor welke waarden van x zal de reeks
$$1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + 5x^8 - \text{enz.}$$
convergeeren, en waarop berust de beoordeeling.

3*a*. Te onderzoeken of de reeks
$$\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \text{enz.}$$
convergeert of divergeert.

4. Van een derdemachtsverg. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ zijn de wortels a, b en c. Van welke verg. zijn de wortels ab, bc en ca?
5. De waarde van x te vinden uit

$$x = \sqrt[3]{\left(1284^{\frac{1}{7}} - 0{,}386^{-3{,}2345}\right)}.$$

6. De vergelijking $4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0$ te onderzoeken met het oog op het al of niet bestaan van meetbare, gelijke en onbestaanbare wortels. Welke zijn die meetbare en gelijke wortels? (2 wortels $x = \frac{1}{2}$; de andere wortels zijn $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$).
7. De waarde van x te berekenen uit

$$x = \sqrt[\frac{0{,}5729}{1{,}293}]{\left(7{,}8296 - \sqrt[-0{,}5689]{0{,}06321}\right)}.$$

8. Welk getal heeft, als het door 28 gedeeld wordt, tot rest 20; door 19 gedeeld tot rest 12; door 15 gedeeld tot rest 10?
9. De thermometer Fahrenheit staat op zekeren dag 's namiddags 12 uren op 75°, om 2 uren op 78°, om vier uren op 74° en om 6 uren op 68°. Hieruit af te leiden den waarschijnlijken stand om half drie op dien dag en de daartoe noodige formule te bewijzen.
Antwoord: $77\frac{59}{128}$ graad.

---

10. Twee spoortreinen rijden elkaar te gemoet. A met eén snelheid van 50, B met een van 60 kilometer per uur. Zij verlaten elk hun station op den waren middag. Verschil 15°. Lengte van den weg langs de parallel 1400 kilometer. A heeft twee halten à 10 minuten. De ware tijd van de plaats waar zij elkaar ontmoeten? A westwaarts van B.
11. Den inhoud te vinden van den kleinsten kegel, die om een bol kan beschreven worden.
12. Als men van een 3de machtsvergelijking de afgeleide vormt, en de wortels van deze in de eerste substitueert, krijgen beide uitkomsten hetzelfde teeken. Aantoonen dat twee wortels onbestaanbaar zijn.

1868.

1. Drie lichamen A, B en C bevinden zich in een hoekpunt van een vierkant, waarvan de zijde 10 duim is. Ze bewegen zich in dezelfde richting met de snelheden 5, 6 en 7. Wanneer zullen voor de eerste maal tegelijkertijd A in het 2de, B in het 3de en C in het 4de hoekpunt zijn?
2. Van eene derdemachtsvergelijking $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ zijn de wortels a, b en c. Van welke vergelijking zijn de wortels ab, bc en ac?

1875.

1. Bepaal zonder gebruik te maken van afgeleide functies, welke waarde men aan x moet geven, opdat $x^2 + (6 - x)^2$ zoo klein mogelijk zij.
   ANTWOORD: 3.
2. Onderzoek door toepassing van het theorema van STURM tusschen welke geheele getallen de reëele wortels liggen van de vergelijking
   $$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$
   ANTWOORD: 1 tusschen 0 en 1
   1 „ 3 en 4
   2 „ 0 en — 1
   1 „ — 3 en — 4.
3. Benader in 6 decimalen den kleinsten positieven wortel der vergelijking
   $$x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0.$$
   ANTWOORD: 1,237729.
4. Onderzoek de convergentie der binomiaalreeks, ook voor $x = 1$.
   De tijd was voor 2 en 4 samen 3 uur.
5. Bereken de waarde van x, als
   $$x - \text{bg tg}\, x = 0{,}2.$$

6. Bepaal den n-den term der wederkeerende reeks, die ontstaat door ontwikkeling der breuk

$$\frac{8x^2 - 5x + 1}{1 - 8x + 21x^2 - 18x^3}$$

Tijd: 1 uur.

7. Sommeer de wederkeerende reeks

$$1 - x + x^2 - \tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{37}{6}x^4 - \tfrac{37}{3}x^5 + \tfrac{160}{3}x^6 - \tfrac{397}{3}x^7 \text{ enz.}$$

8. Bepaal den n-den term en de grenzen voor de convergentie van de wederkeerende reeks, die ontstaat bij ontwikkeling der breuk

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}.$$

9. Bepaal de limiet, waartoe

$$\frac{\operatorname{tg}(a + \delta) - \operatorname{tg}(a - \delta)}{\text{bg. tg}\,(a + \delta) - \text{bg. tg}\,(a - \delta)}$$

nadert, als δ tot nul nadert.

ANTWOORD: $\dfrac{1 + a^2}{\cos.\,^2 a}$.

10. Ontwikkel $\left(\dfrac{2x}{1 + x}\right)^n$ in een reeks, die opklimt volgens de machten van $\dfrac{1 - x}{1 + x}$.

Tijd: drie kwartier.

11. Als een derdemachtsvergelijking met reëele meetbare coëfficienten geen meetbaren wortel bezit, bezit zij ook geen gelijke wortels. Bewijs dit en onderzoek of die eigenschap doorgaat voor vierde- en vijfdemachtsvergelijkingen.

1876.

1. Voor welke meetbare waarden van x wordt $9x^2 - 5x + 7$ een volkomen vierkant?

ANTWOORD: -6, $\frac{7}{5}$, $\frac{6}{11}$, enz.

2. Benader de reëele wortels der vergelijking $x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0$ in zes decimalen.

ANTWOORD: 1,237729 en 3,863658.

3. Bepaal een meetkundige reeks van vier termen, waarvan de som der middelste termen 24 en de som der kwadraten van de uiterste termen 2920 is.
   ANTWOORD: 2, 6, 18, 54.
4. Bepaal alle wortels der vergelijking
   $$x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16 = 0.$$
   ANTWOORD: $f(x) = (x - 2)^4 (x^2 + x - 1)$.
5. Benader in vijf decimalen den grootsten wortel der vergelijking
   $$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x = 654321.$$
   ANTWOORD: 8,95698.
6. Tusschen welke grenzen kan de breuk
   $$\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 4x + 3}$$
   veranderen voor reëele waarden van x.
7. Onderzoek of de reeks
   $$a^p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^p + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^p + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a}{4}\right)^p + \ldots\ldots\ldots$$
   convergent is.
   ANTWOORD: convergent voor $p > 0$, divergent voor $p =$ en < 0.
8. Evenzoo
   $$\frac{1}{\sin. a} + \frac{1}{2 \sin. 2a} + \frac{1}{3 \sin. 3a} + \frac{1}{4 \sin. 4a}$$
   ANTWOORD: *div.*
9. Bepaal alle wortels der vergelijking
   $$x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = 0.$$
   ANTWOORD: 3 wortels 1 en de 2 wortels van $x^2 + 3x + 6 = 0$.
10. De vergelijking
    $333x^5 - 1744x^4 + 1648x^3 + 333x^2 + 920x - 1548 = 0$
    heeft tusschen 1 en 2 twee wortels, die weinig verschillen. Benader die wortels in 6 decimalen.
    ANTWOORD: 1,237236 en 1,237729.
11. Bepaal door middel van het theorema van STURM tusschen

welke 2 opeenvolgende geheele getallen elk der wortels van de vergelijking

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 10 = 0$$

gelegen is.

ANTWOORD: — 2 en — 3
— 1 en 0
2 en 3 (2 wortels).

12. Evenzoo

$$2x^4 - 13x^2 + 10x - 10 = 0.$$

ANTWOORD: Tusschen 2 en 3, tusschen – 3 en – 4.

1877.

Tijd: 2 uren.

1. De waarden van x en y te bepalen, die voldoen aan

$$x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)\,x - y^3 + y^2 - 2y = 0$$

en

$$x^2 - 2xy + y^2 - y = 0.$$

2. Bepaal de convergentie of divergentie en zoo mogelijk de som van n termen der reeks

$$\frac{1}{3 \times 7} + \frac{1}{5 \times 9} + \frac{1}{7 \times 11} + \frac{1}{9 \times 13} + \text{enz.}$$

3. Van een rekenkundige reeks van de derde orde is de eerste term a, de tweede b, de zevende c en de som van de eerste 12 termen d. Worden de termen van eerstgenoemde reeks achtereenvolgens vermenigvuldigd met 1, x, x^2, x^3 . . . . ., dan vraagt men de voortbrengende breuk te bepalen van de verkregen wederkeerende reeks.

Tijd: 2 uren.

1. Los x en y op uit

$$-x^2 + 1 + x^2y - y^3 + 7y^2 - 7y = 0$$

en $-x^2 - 1 + x^2y + y^3 - y^2 + 4x + 4xy = 0.$

2. Van een rekenk. reeks van hoogere orde is de algemeene term

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 8.$$

Men wil tusschen elk paar termen dezer reeks 2 andere interpoleeren en vraagt dan de som van x termen der verkregen reeks.

3. Onderzoek de convergentie of divergentie der reeks

$$\frac{1}{x(x+p)} \pm \frac{3}{(x+2)(x+p+2)} + \frac{5}{(x+4)(x+p+4)} + \text{enz.}$$

1879.

Bepaal tot in 2 decim. de wortels van

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0.$$

Onderzoek conv. en somm. van de reeks

$$\Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{Ax^2 + Bx + C}{n!}$$

1880.

1. Met behulp der stelling voor Moivre den vorm $x^8 + 1$ te ontbinden in bestaanbare factoren van den tweeden graad.
2. Den middelsten term te verdrijven uit
$$x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 6x - 4 = 0.$$
3. Voor welke waarden van x wordt de uitdrukking
$$\frac{a\sqrt[4]{(a-x)^3}}{(a-x)(b-x)}$$
reëel, positief, negatief, nul en oneindig groot?
4. Bepaal door een rechtstreeksche oplossing de wortels van
$$x^4 - 22x^2 - 48x - 23 = 0.$$
Antwoord: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$
$\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$
$-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$
$-\sqrt{2} - \sqrt{3} \pm \sqrt{6}$
5. Splits de breuk $\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}$ in andere, wier noemer van lageren graad is.
6. Onderzoek door middel van het theorema van Sturm de ligging der wortels van de vergelijking
$$2x^4 - 13x^2 + 10x - 19 = 0.$$
7. De wortels te bepalen van de vergelijking
$$x^5 - 11x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 11x + 1 = 0.$$

8. De som te bepalen van de reeks
$a \sin \omega + a^2 \sin 2\omega + a^3 \sin 3\omega + a^4 \sin 4\omega + \ldots\ldots$
9. Onderzoek de convergentie der reeks
$$\frac{a}{b}, \frac{a(a+1)}{b(b+1)}, \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}, \text{ enz.}$$
ANTWOORD: Men vindt $n\,a = b - a$.
10. Ontwikkel sin x volgens opklimmende machten van tg x en onderzoek de convergentie der reeks.
11. Van de vergelijking $x^3 + 8x^2 + 7x - a = 0$ zijn twee der wortels $-5 \pm \sqrt{-b}$. Bepaal de waarden van a en b.
12. De wortels op te sporen van
$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0$.
ANTWOORD: Men vindt $(x+1)^3 (x-1)^2 (x+2)^4 = 0$.
13. De breuk $\dfrac{11x^2 - 17x + 2}{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}$ te ontwikkelen in reeksen geordend naar de opklimmende en naar de afdalende machten van x met bepaling der grenzen van convergentie.
14. Den aard der wortels te bepalen van de vergelijking
$$13x^4 - 50x^3 + 75x^2 - 62x + 25 = 0$$
en een der reële wortels te benaderen in 4 decimalen nauwkeurig.
15. Uit een bol te snijden een bolschijf, wier inhoud de helft is van dien des bols, door twee vlakken, waarvan het eene tweemaal zoo ver als het andere van het middelpunt verwijderd is.

1884.

1. Voor welke waarden van x is de som der kwadraten $(ax + b)^2$ en $(cx + d)^2$ een minimum?
2. Van een rekenkundige reeks van hoogere orde is de som van x termen
$$2x + 3x^2 - 4x^3 + x^4.$$
Bepaal de formule voor den algemeenen term dier reeks.
3. Bereken x en y uit de vergelijkingen
$$x^3 + y^3 = 35 \quad xy = 6.$$

4. Benader in 6 decimalen een wortel der vergelijking
$$x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 112x^2 - 207x = 110.$$

1. Ontbind den veelterm
$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3$$
in meetbare factoren.
2. Op hoeveel verschillende manieren kunnen 5 voorwerpen verdeeld worden in 2 groepen.
3. Op te lossen de vergelijkingen
$$x^3 + y^3 = a^3 \text{ en } x^2y^2 = b^4.$$
4. Splits de breuk $\dfrac{7x - 3}{x^3 - 3x^2 + x + 5}$ in andere, wier noemers van lageren graad zijn.

1886.

1. Onderzoek, door middel van het theorema van Sturm, hoeveel reëele wortels de vergelijking
$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 18\tfrac{2}{3}x + 5\tfrac{1}{3} = 0$$
heeft en waar die wortels liggen.
2. De drie zijden van een driehoek zijn de wortels van de vergelijking
$$x^3 - 36x^2 + 413x - 1530 = 0$$
Van welke vergelijking zijn de wortels de hoogtelijnen van denzelfden driehoek?
3. Bepaal door de rechtstreeksche oplossing de wortels van de vergelijking
$$x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 12x - 4 = 0.$$
ANTWOORD: $2 \pm \sqrt{2}$ en $-1 \pm \sqrt{3}$.
4. Sommeer de wederkeerende reeks
$$1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \ldots\ldots$$
5. Ontwikkel $\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^n$ in een reeks, die opklimt volgens machten van $\dfrac{1}{2x+1}$.

6. Splits in meer eenvoudige breuken

$$\frac{4x^3 - 5x + 2}{x^6 - x^5 - x^4 + x^3}.$$

ANTWOORD: $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{7}{4(x-1)}$

$$- \frac{3}{4(x+1)}.$$

7. Benader de positieve wortels van de vergelijking

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$$

in 6 decimalen nauwkeurig.

ANTWOORD: 1,636914 en . . . . .

8. Bepaal al de wortels van de vergelijking

$$4x^6 - 24x^5 + 57x^4 - 73x^3 + 57x^2 - 24x + 4 = 0.$$

9. Bepaal de maximum- en minimumwaarden van de breuk

$$\frac{x^2 \pm 1}{x^2 - 4x + 3}$$

als x reëel moet zijn.

INHOUD.

Blz.

NATUURKUNDE VAN DEN MENSCH.

VRIJ BEWERKT NAAR DE LAATSTE UITGAVE VAN

Prof. Thomas H. Huxley's „Lessons in Elementary Physiology"

DOOR

Dr. R. SINIA,

Directeur der Hoogere Burgerschool te Brielle.

Prijs *f* 3,00.

De bewerker van Huxley's *Lessons* deelt ons in zijne voorrede mede, dat dit boek in de eerste plaats bestemd is voor allen, die zich voorbereiden tot een examen, waarbij kennis van 't menschelijk lichaam gevorderd wordt, in de tweede plaats meent hij, dat allen, die 't „ken u zelven" in physieken zin wenschen te behartigen, het met vrucht zullen kunnen gebruiken, en ik van mijne zijde kan daaraan toevoegen, dat ik deze meening met den bewerker deel en hem van harte geluk wensch met zijn wel volbrachten arbeid. Op 320 bladzijden wordt ons, opgehelderd door talrijke figuren, een degelijke beschrijving gegeven van de verschillende organen van ons lichaam. Achtereenvolgens komen, na een algemeen overzicht van den bouw en de levensverrichtingen van 't menschelijk lichaam gegeven te hebben, het vaatstelsel, de bloedsomloop, het bloed, de lymphe, de ademhaling, de voeding, de beweging, de gewaarwordingen en zintuigen, het zenuwstelsel in behandeling, terwijl deze behandeling uitmunt door groote duidelijkheid, vooral omdat de schrijver naast den algemeen gebruikelijken wetenschappelijken naam steeds zooveel mogelijk goed Nederlandsche woorden gebruikt, iets dat door mannen van 't vak doorgaans over 't hoofd wordt gezien, zoodat een verslag van een geneesheer over een belangrijk gezwel, een prachtige operatie of een ingewikkeld ziekteverschijnsel wel iets heeft van eene verhandeling opgesteld in de eerste dagen na de Babylonische spraakverwarring.

Ook de stijl laat weinig of niets te wenschen over, hier en daar ontmoet men eene uitdrukking die beter had kunnen zijn, maar deze minder gelukkig geslaagde volzinnen zijn hoogst zeldzaam.

. . . .

Mogen schrijver en uitgever in een ruim debiet vergoeding vinden en voldoening smaken voor de moeiten en kosten, die zij zich getroost hebben om dit meesterstuk van den grooten Huxley in een goed Nederlandsch kleed 't publiek aan te bieden!

Van ganscher harte aanbevolen!

(*Vooruit* van 5 Juni '86). G. A. V. V. O.